UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA

Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario

VIII ciclo a.s. 2006-2007

Indirizzo F.I.M.

Laboratorio di Didattica della Matematica

UNITA' DIDATTICA

L'INTEGRALE

DA DEFINITO A INDEFINITO

Gruppo: Lazzarini Martha
Mariani Flavia
Raschellà Raffaella

Introduzione

Viene presentato il concetto di integrale e le tecniche di calcolo secondo il percorso definito-indefinito. Viene cioè presentato il problema di calcolo delle aree e definito l'integrale definito; quindi viene mostrata la necessità di uno strumento per il calcolo dell'integrale definito, che viene trovato nell'integrale indefinito e nel teorema fondamentale del calcolo.

Classe: V Liceo Scientifico

Schema dell'unità didattica

Obiettivi

Obiettivi specifici:	integrale definito e interpretazione geometrica
	calcolo di aree comprese tra due curve grafico di funzione
	funzione primitiva e integrale indefinito
	teorema fondamentale del calcolo
	teoremi e proprietà principali degli integrali
	calcolo di integrali definiti e indefiniti
Obiettivi generali:	saper confrontare l'economicità e generalità dei diversi strumenti matematici e saper scegliere quello più opportuno nelle diverse situazioni

Fasi dell'attività

FASE	TIPOLOGIA	DESCRIZIONE	PREREQUISITI	OBIETTIVI
1	attività di gruppo (2 h)	Spunto storico. Calcolo delle aree con il metodo di esaustione. Area del cerchio. Archimede e il segmento parabolico	geometria, limiti e teoremi, serie e successioni, trigonometria	comprendere la necessità di un metodo generale per il calcolo delle aree
2	attività di gruppo (2 h)	Somme inferiori e superiori e calcolo di aree come loro limite	funzione, limite, serie aritmetica e geometrica, teorema Weierstrass	costruire il concetto di integrale definito
3	lezione frontale (1 h)	Definizione integrale definito e interpretazione geometrica proprietà e teorema media	intervalli, sup e inf, funzione e suo grafico (teo dei valori intermedi)	formalizzare il concetto di integrale definito
4	attività di gruppo (2 h)	Limiti del metodo dei rettangoli: casi in cui non funziona, casi in cui non è economico	funzione e suo grafico, sommatorie, limiti di successioni	comprendere la non generalità del metodo del limite delle somme inferiori e superiori
5	lezione frontale (1 h)	Definizione funzione integrale e interpretazione geometrica Definizione di primitiva Teorema di Torricelli	funzione e suo grafico, derivata, limite, teorema media integrale, teoremi funzioni continue	acquisire uno strumento di calcolo degli integrali definiti
6	lezione frontale	Definizione di integrale indefinito Proprietà Tecniche di calcolo	funzione, derivata e primitiva	calcolare gli integrali, definiti e indefiniti

Scheda insegnante

Teoria

Integrale secondo Riemann [1]

Nel seguito si sottintenderà che ogni funzione è a valori reali di variabile reale.

1. Definizione di integrale definito. Data la funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, limitata in [a,b], e una partizione π in un numero finito di intervalli

$$\pi: x_0=a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n=b$$

siano $m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i])$ e $M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$ e si costruiscano le somme inferiore e superiore

$$s_\pi = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad S_\pi = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Siano I′=sup s_π e I′′=inf S_π al variare della partizione di [a,b]. Se I′=I′′=I la funzione si dice *integrabile su [a,b]* e I si dice *integrale di f su [a,b]* e si scrive

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

2. Condizione NeS per l'integrabilità. Sia data f limitata in [a,b] e s_n e S_n siano le somme inferiore e superiore relative a una partizione di [a,b] in n intervalli di uguale lunghezza. f è integrabile se e solo se

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n - s_n\right) = 0$$

e in tal caso le successioni S_n e s_n convergono entrambe allo stesso limite I. La stessa conclusione vale per partizioni arbitrarie π_n con $|\pi_n|\to 0$, dove $|\pi_n|$ è il *passo* della partizione, cioè la lunghezza del massimo sottointervallo della partizione .

Questa caratterizzazione fornisce uno strumento per il calcolo dell'integrale definito di una funzione integrabile: scelta un'opportuna partizione in n sottointervalli, tale che $|\pi_n|\to 0$ per $n\to\infty$, si trova S_n o s_n e si calcola $I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

3. Integrabilità delle funzioni continue. Se f è una funzione continua in [a,b], è ivi integrabile.

DIM. Per il teorema di Weierstrass, f è limitata in [a,b]. Quindi è uniformemente continua, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in [a,b] \quad |x - x'| < \delta \to |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Considerata una partizione di [a,b] in n intervalli di uguale ampiezza, e chiamate S_n e s_n le somme superiore e inferiore, per $n>(b-a)/\delta$

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - m_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right) = \varepsilon \left(b-a\right)$$

cioè $\lim_{n\to\infty} \left(S_n - s_n\right) = 0$, da cui la tesi per il teorema precedente.

NOTA. La continuità è condizione sufficiente ma non necessaria per l'integrabilità. E' facile vedere che una funzione limitata in [a,b] con un numero finito di discontinuità, essendo continua nei sottointervalli delimitati dai punti di discontinuità, è integrabile su [a,b]. Una prima condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità fu fornita da Riemann, per questo l'integrale definito in (1) si chiama di Riemann. Un'utile condizione necessaria e sufficiente fu data da Darboux:
definiamo *trascurabile* un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ vi è una successione di intervalli (a_i,b_i) che ricopre A ed è tale che $\sum_{i=1}^{\infty} \left(b_i - a_i\right) < \varepsilon$; una funzione *f* limitata in [a,b] è Riemann-integrabile su [a,b] se e solo se l'insieme dei punti in cui *f* non è continua è trascurabile.

4. Teorema della media. Se *f* è continua in [a,b] allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\left(b-a\right)$$

DIM. Essendo *f* continua in un intervallo chiuso, è limitata, quindi, chiamati *m* e *M* il minimo e il massimo, per la proprietà di monotonia dell'integrale definito si ha

$$m\left(b-a\right) \le \int_a^b f(x)dx \le M\left(b-a\right)$$

allora per il teorema di Darboux dei valori intermedi esiste un *c* tale che *f(c)=I/(b-a)*, da cui la tesi.

NOTA. Il significato geometrico della media integrale, cioè la quantità $I_m = \int_a^b f(x)dx / \left(b-a\right)$ è che l'area sottesa alla curva di equazione y=f(x) nell'intervallo [a,b] è uguale all'area del rettangolo di base (b-a) e altezza I_m. Inoltre I_m è il limite della media aritmetica $(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))/n$ dei valori assunti da *f* in n punti equispaziati.

5. Teorema di Torricelli. Data la funzione *f* continua in [a,b], la funzione integrale Φ: $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ è derivabile in [a,b] e $\Phi'(x)=f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

DIM. Consideriamo $x \in [a,b]$ e un incremento h:

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

per il teorema della media, esiste un $c \in [x,x+h]$ se h>0, oppure $c \in [x+h,x]$ se h<0, tale che:

$$f(c)\cdot h = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

da cui

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\frac{1}{h}f(c)\cdot h=f(c)$$

per h→0, essendo c compreso tra x e x+h, c→x quindi, essendo f continua,

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$$

cioè la tesi.

6. Teorema fondamentale del calcolo. Data la funzione *f* continua in [a,b] e una sua primitiva F, F(b) - F(a) = $\int_a^b f(t)dt$.

DIM. Per il teorema di Torricelli e le ipotesi, la funzione F e la funzione integrale Φ hanno la stessa derivata *f* nell'intervallo [a,b], quindi differiscono per una costante, quindi:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + k$$

cioè, essendo F(a) = $\int_a^a f(t)dt$ +k = k,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

da cui

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$$

da cui la tesi.

Esercizi svolti

In questa sezione sono riportate le soluzioni dettagliate delle attività proposte e discusse nelle lezioni.

Esercizi proposti nella fase 2.

1. Calcolare l'area del trapezoide definito su I [0,1] dalla cubica y = x^3.

Suddividendo I in n intervalli congruenti di misura $\Delta x=\frac{1}{n}$: le ascisse dei massimi sono: M_k= 1/n, 2/n, 3/n,….n/n, mentre le altezze dei rettangoli circoscritti sono: f(M_k) = $(1/n)^3$, $(2/n)^3$,…..$(n/n)^3$.

Risulta allora $S_n=\frac{1^3+2^3+3^3+.....+n^3}{n^4}=\frac{[1+2+3+...n]^2}{n^4}=\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n^4}$

Quindi $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$

2. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty}\left(S_n - s_n\right) = 0$

Essendo $S_n - s_n = \Delta x\, f(M_n) = 1/n$ risulta $\lim_{n\to\infty}\left(S_n - s_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Esercizi proposti nella fase 4.

1. $\int_a^b x^2 dx$

Dividendo in n parti uguali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)^2 = \frac{b-a}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(n^2a^2 + k^2(b-a)^2 + 2ank(b-a)\right)$$
$$= \frac{b-a}{n}a^2\sum_{k=1}^{n}1 + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$= (b-a)a^2 + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\frac{n(n+1)}{2}$$

passando al limite:

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = ba^2 - a^3 + \frac{(b-a)^3}{3} + a(b-a)^2$$
$$= ba^2 - a^3 + \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + ba^2 - b^2a + ab^2 + a^3 - 2ba^2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

2. $\int_0^a 2^x dx$

Dividendo in n parti uguali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}2^{\frac{ka}{n}} = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{a/n}\right)^k = \frac{a}{n}\cdot\frac{1-2^a2^{a/n}}{1-2^{a/n}}$$

passando al limite:

$$\int_0^a 2^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a/n}{2^{a/n}-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2^a2^{a/n}-1\right) = \frac{2^a-1}{\log a}$$

3. $\int_0^a \sqrt{x}dx$

Dividendo in n parti uguali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{a}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$$

si trova una sommatoria di cui non si conosce la somma.

Si può scegliere allora una partizione in n parti in modo che $x_k = a(k/n)^2$ e ogni sottointervallo $\Delta x_k = (2k-1)a/n^2$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}a\cdot\frac{2k-1}{n^2}\cdot\sqrt{\frac{ak^2}{n^2}} = \frac{a^{3/2}}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-k\right) = a^{3/2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3} - \frac{n(n+1)}{2n^3}\right)$$

passando al limite:

$$\int_0^a \sqrt{x}dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}a^{3/2}$$

4. $\int_1^a \frac{dx}{x}$, a$\notin\mathbb{N}$

Dividendo in n parti uguali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a-1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k(a-1)}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a-1}{n+k(a-1)}$$

di cui non si conosce la somma.

5. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

Dividendo in n parti uguali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2-1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k(2-1)}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

la cui somma non si può esprimere in modo elementare in funzione di n. Infatti $\sum_{k=1}^{n} 1/k = \gamma + \Psi_0(n+1)$, dove $\gamma = 0.57721...$ è la costante di Eulero-Mascheroni, e Ψ_0 è la funzione digamma. Si può però approssimare la somma precedente con:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

quindi asintoticamente per $n \to \infty$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log 2n - \log n = \log 2$$

6. $\int_a^b x dx$

Dividendo in n parti uguali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot \left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{(b-a)}{n} na + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

passando al limite:

$$\int_a^b x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = a(b-a) - \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Appendice

Funzione digamma: $\Psi_0(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right) dt = -\gamma + \int_0^\infty \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt$

Funzione gamma: $\Gamma(z)= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}$

Descrizione dell'attività

Fase 1

Motivazione

Viene introdotto il problema delle aree in casi particolari. La risoluzione, effettuata mediante il metodo di esaustione, viene sviluppata con un lavoro di gruppo per mettere in evidenza che questo metodo ha bisogno di scelte studiate caso per caso così da far emergere la necessità di uno strumento più generale.

Scaletta

- lavoro di gruppo: segmento parabolico
- lavoro di gruppo: cerchio

Ostacoli

- difficoltà nell'individuare i poligoni più adatti per l'approssimare
- epistemologico: difficoltà nell'accettare che questo processo di approssimazione non è finito

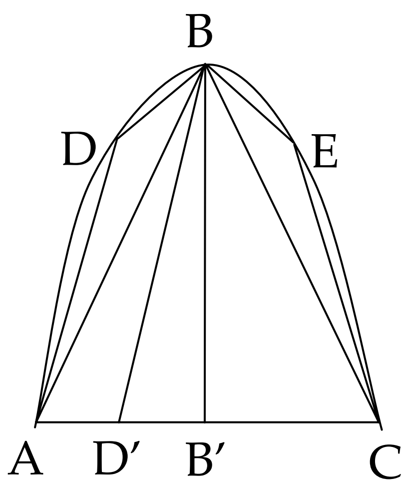
Lezione

- lavoro di gruppo: segmento parabolico

Lavoro di gruppo 1: Trovare una approssimazione dell'area del segmento parabolico delimitato dall'asse x e dalla parabola $y=-2x^2+8$.

Rilanci: Innanzi tutto bisogna fare il disegno abbastanza grande.

1. Archimede risolse il problema mediante il metodo di esaustione, cioè approssimando il segmento parabolico con poligoni.
2. Possiamo scegliere un triangolo opportuno che approssimi per difetto il segmento parabolico.



Svolgimento:

Scegliamo il triangolo ABC in figura e calcoliamo l'area:

$A_1=4*8/2=16$.

Lavoro di gruppo 2: Trovare una approssimazione migliore.

Rilanci:

1 Potremmo continuare ad approssimare le zone rimaste con altri triangoli. E' utile notare, per semplicità di calcolo, la simmetria.

2 Consideriamo come vertice del triangolo aggiunto il punto sulla parabola di ascissa il punto medio di AO.

Svolgimento:

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2+8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=6 \end{cases}$ D(-1, 6)

$AB=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

AB: $\frac{y-0}{8-0}=\frac{x+2}{0+2}$ $\frac{y}{8}=\frac{x+2}{2}$ y=4(x+2) y=4x+8 4x-y+8

DH=d(D,AB)=$\frac{|-4-6+8|}{\sqrt{16+1}}=\frac{2}{\sqrt{17}}$

$A_{ADB}=\frac{2\sqrt{17}}{2}\frac{2}{\sqrt{17}}=2$

$A_2=A_{ADB}+A_{BEC}=2A_{ADB}=2*2=4$

Lavoro di gruppo 3:

1. A questo punto ci possiamo chiedere in che rapporto sono le due aree A_1 ed A_2. $A_2/A_1=16/4=1/4$, $A_2=(1/4)A_1$.

2. Rimangono però ancora delle parti da riempire e quindi il procedimento può essere iterato ottenendo? (Una progressione geometrica di ragione q=¼)

3. Quindi ci aspettiamo che l'area del segmento parabolico sia?

Svolgimento: definendo S_n la somma delle prime n aree, costruite con il metodo indicato,

A=$\lim_{n\to\infty} S_n = A_1\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{3}A_1$, essendo $S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

Questo ce lo dice la nostra costruzione, ma non è una dimostrazione. Anche Archimede, applicando questo stesso metodo di esaustione arrivò allo stesso risultato che poi dimostrò formalmente nel suo trattato. La dimostrazione consiste in un doppio assurdo, cioè Archimede dimostra che l'area del segmento parabolico non può essere né maggiore né minore dei 4/3 del triangolo che ha per base la stessa base e per altezza la stessa altezza del segmento parabolico. E' ovvio che se l'area del segmento parabolico è uguale ai 4/3 dell'area del triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento parabolico, sarà anche uguale ai 2/3 dell'area del rettangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento parabolico.

Il metodo di esaustione che abbiamo usato per un segmento parabolico particolare può essere applicato in generale, se si riesce a individuare una figura per eseguire l'approssimazione, calcolare l'area come limite e dimostrare che il valore ottenuto è l'area cercata.

- lavoro di gruppo: cerchio

Lavoro di gruppo 4: Approssimare l'area di una circonferenza di centro O e raggio r.

Rilancio:

1 Utilizziamo poligoni regolari per l'approssimazione.

Svolgimento: Inscriviamo nella circonferenza un poligono regolare di n lati. La sua area è data dalla misura del semiperimetro per l'apotema. L'apotema di questo poligono regolare inscritto è: $a=r*\cos\frac{\pi}{n}$, quindi l'area del poligono regolare inscritto è: $A_1=\frac{1}{2}2nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$.

Per n che tende ad infinito questa area tende a:

$$\lim_{n\to\infty} A_1=\lim_{n\to\infty}\left(nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)=r^2\lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi}{t}\sin t\cos t\right)=\pi r^2$$

Se circoscriviamo alla circonferenza un poligono regolare di n lati, il suo apotema sarà r e la sua area: $A_2=\frac{1}{2}2nr^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}=nr^2\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$. Per n che tende ad infinito questa area tende a:

$\lim_{n\to\infty} A_2=\lim_{n\to\infty}\left(nr^2 tg\frac{\pi}{n}\right)=r^2\lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi}{t}\frac{\sin t}{\cos t}\right)=\pi r^2$. Per il teorema del confronto allora l'area della circonferenza sarà: $A=\pi r^2$.

Anche ora si è dovuto procedere scegliendo degli opportuni poligoni per l'approssimazione, si è dovuto individuare il risultato cercato e poi dimostrare tramite teoremi che in effetti quella è proprio l'area cercata. Il vantaggio rispetto al metodo di esaustione è che si costruiscono due successioni, una minorante e una maggiorante l'area cercata, per cui la loro convergenza a uno stesso valore garantisce che questo sia l'area da calcolare, senza dover ricorrere alla doppia dimostrazione per assurdo.

Fase 2

Motivazione

L'avvicinamento al concetto di integrale definito viene introdotto tramite il concetto di area calcolata attraverso diverse tecniche scelte ad hoc per ogni singolo problema (esaustione, plurirettangoli); l'attività di gruppo serve a sperimentare l'utilità e i limiti di ogni soluzione e ad esplorare tecniche più generali. Questa attività di gruppo dovrebbe facilitare la distinzione tra gli aspetti necessari e convenzionali della successiva definizione di integrale definito.

Scaletta

- introduzione al problema del calcolo dell'area sottesa a una curva: metodo delle somme inferiori e superiori dei plurirettangoli
- lavoro di gruppo: applicazioni del metodo dei plurirettangoli

Ostacoli

Difficoltà:

- epistemologica: passaggio dal discreto al continuo
- gli esercizi proposti presuppongono particolari abilità nella trattazione delle serie e della partizione di un segmento.

Lezione

- introduzione al problema del calcolo dell'area sottesa a una curva: metodo delle somme inferiori e superiori dei plurirettangoli.

Archimede aveva risolto il problema del calcolo dell'area di un segmento parabolico per esaustione. E' necessario individuare un metodo generale che permetta di calcolare la misura dell'area di una figura generica. Successivamente fu individuato il metodo del calcolo del limite di successioni, ma anche questa seconda strada si rivelerà impraticabile per figure complesse. Vediamo in dettaglio il metodo delle successioni. Il problema del calcolo di un'area di figura piana a contorno curvilineo può essere ridotto allo studio del trapezoide, ovvero una figura mistilinea delimitata da una funzione f(x) definita su un intervallo I [a,b].

1. Definiamo una funzione f che sia
    - definita e continua su I [a,b].
    - non negativa su I

2. Definiamo su I una nuova funzione A che associ ad ogni x ∈ I la misura unica A(x) dell'area del trapezoide formato dal semiasse x positivo e dalla curva di equazione y=f(x), e di base h = x–a.

Esercitazione di gruppo 1 sul concetto di funzione area A: data la funzione di equazione $y = x^2$ costruire l'espressione A(x) della funzione Area del trapezoide; sfrutta il risultato della fase 1.
Svolgimento: essendo l'area del segmento parabolico i 2/3 dell'area del rettangolo circoscritto, $A(x) = x^3/3$.
L'insegnante a questo punto dovrebbe suggerire di derivare la funzione A così trovata facendo notare che tale derivata coincide con la funzione che ha per equazione quella della parabola stessa e chiedere di verificare nelle prossime lezioni se tale risultato potrebbe essere generalizzato.

Lavoro di gruppo 2:
Ora che abbiamo definito la funzione area, introduciamo un metodo generale (dei plurirettangoli) che ci consenta di arrivare a tale funzione.
Calcolare l'area del trapezoide definito su I [0,1] dalla cubica $y = x^3$.
Rilancio: suddividere I in n intervalli congruenti di misura $\Delta x = \frac{1}{n}$.
L'insegnante si aspetta che i ragazzi arrivino a determinare la somma dei rettangoli circoscritti $S_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3}{n^4}$ e che intuiscano che infittendo la partizione dell'intervallo, ovvero aumentando n all'infinito si arrivi al valore corretto dell'area. Si presenta ora il problema di trovare una dipendenza di S_n da n più utile al calcolo del limite, ovvero bisogna trovare una forma analitica per la somma dei primi n cubi.

Rilancio: $S_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3}{n^4} = \frac{[1+2+3+...n]^2}{n^4} = \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n^4}$

Istituzionalizzazione del metodo dei plurirettangoli:
Si consideri l'intervallo I [a,b] e una funzione di equazione y = f(x) ivi definita e continua. Eseguiamo ora una suddivisione di I in n sottointervalli congruenti di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e si costruiscano i rettangoli di base Δx e altezza il massimo di f in tale intervallino (rettangolo circoscritto) e quelli di

base Δx e altezza il minimo di f (rettangolo inscritto). Il teorema di Weierstrass sulle funzioni continue garantisce l'esistenza del massimo e del minimo in ogni sottointervallo Δx_K. Chiamiamo M_k e m_k rispettivamente i punti di massimo e di minimo di ogni sottointervallo.

Il plurirettangolo circoscritto è l'unione dei rettangoli costruiti coi massimi ed avrà area $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_1^n f(M_k)$ che approssima per eccesso quella del trapezoide S.

Il plurirettangolo inscritto è l'unione dei rettangoli costruiti coi minimi ed avrà area $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_1^n f(m_k)$ che approssima per difetto quella del trapezoide S; ovvero per costruzione sarà $s_n \leq S \leq S_n$.

Se, all'infittirsi della partizione (per $n\to\infty$), entrambe le successioni convergono allo stesso valore, l'area S = $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$

L'insegnante a questo punto riprende l'esempio svolto nel lavoro di gruppo 2 e puntualizza che il limite S trovato garantisce semplicemente che l'area del trapezoide è maggiorata dal valore ¼. Bisogna ora dimostrare che anche il limite di s_n converge allo stesso valore:

Rilancio: si dimostri che $\lim_{n\to\infty}\left(S_n - s_n\right) = 0$

lavoro di gruppo 3: *La classe ha sin qui acquisito la procedura di calcolo dell'area sottesa da una curva tramite plurirettangoli costruiti a partire da una partizione di I in intervalli congruenti. L'insegnante fa eseguire ora un secondo esercizio con tale metodo che introduce ulteriori difficoltà di calcolo a dimostrazione che il metodo risulta poco economico.*

Calcola l'area del trapezoide generato sull'intervallo I[0,1] dall'equazione $y = x^4$. Cosa ti assicura che per trovare la soluzione basta calcolare il limite $n \to \infty$ di S_n?

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n - s_n\right) \propto \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

L'insegnante si aspetta che la classe arrivi a $S_n = \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots + n^4}{n^5}$ *e che a questo punto si fermi poiché il calcolo della somma delle prime n potenze alla quarta risulta estremamente complesso.*

Rilancio: Pierre Fermat nel 1657 propone un metodo generale per la quadratura di $y=x^p$, con p intero diverso da -1.

- considera $y = x^p$ e dividi I=[0,a] NON in parti tutte uguali ma secondo una partizione definita dai punti di ascissa a, aE, aE^2, …, aE^{n-1}, 0, con E<1.
- calcola le aree superiori e l'area del plurirettangoli come somma delle singole aree

Svolgimento: area1=a^p(a-aE); area2=$(aE)^p$($aE-aE^2$); area3=$(aE^2)^p$($aE-aE^2$), quindi l'area del plurirettangolo è: $S_n = (1-E)a^{p+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(E^{p+1}\right)^k$, cioè è proporzionale a una serie geometrica di ragione q=E^{p+1}. Sapendo che $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, riscriviamo la somma come:

$$S_n = (1-E)a^{p+1}\frac{1-E^{(p+1)n}}{1-E^{p+1}} = a^{p+1}\frac{1-E^{(p+1)n}}{1+E+\ldots+E^p}$$

- Calcola il limite per n→∞, scegliendo $E = \sqrt[n]{1/n}$, in modo che $\lim_{n\to\infty} E = \lim_{n\to\infty} E^k = 1$

Svolgimento: $S = a^{p+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-(1/n)^{(p+1)}}{1+E+\ldots+E^p} = \dfrac{a^{p+1}}{p+1}$

- Esercizio : nel caso particolare $y = x^4$ su [0,1], quanto vale l'area?

Svolgimento: a=1 e p = 4 quindi S = 1/5

- generalizziamo ora per a = x ovvero facendo variare l'estremo dell'intervallo: osserviamo che la funzione che definisce il trapezoide è la derivata dell'area A(x).

Fase 3

Motivazione

In questa lezione si è scelta la modalità frontale perché in effetti, tramite i lavori di gruppo, i ragazzi hanno già costruito il concetto di integrale definito che si deve istituzionalizzare.

Scaletta

- Definizione integrale definito e interpretazione geometrica
- proprietà (linearità, additività e monotonia) e teorema media

Ostacoli

- Misconcetti sull'integrale definito

Lezione

- Definizione integrale definito e interpretazione geometrica

Nella lezione precedente abbiamo visto che, per una funzione f:[a,b]→ℝ continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato [a,b] possiamo definire una qualsiasi partizione P di [a,b] formata da n+1 punti distinti: $a=x_0< x_1< x_2<\ldots<x_n = b$ ovvero da n intervalli di lunghezze diverse, si può inoltre individuare in ogni intervallino k-esimo un inf $f([x_{k-1}, x_k]) = e_k$ al variare di x in tale intervallino ed analogamente un sup $f([x_{k-1}, x_k]) = E_k$. Si definiscano ora:

somma inferiore relativa a P : $s_P = \sum_{k=1}^{n} e_k \Delta x_k$

somma superiore relativa a P : $S_P = \sum_{k=1}^{n} E_k \Delta x_k$

Per costruzione, comunque si scelga P, vale che $s_P \leq S_P$. Al variare delle possibili partizioni, ottengo due classi S e s, che si può dimostrare essere separate. Se esiste un unico elemento separatore (la continuità è condizione sufficiente), l'elemento separatore I è detto **integrale** della funzione f, che si dice **integrabile** su [a,b], e questo integrale si indica con: I=$\int_a^b f(x)dx$ che si legge: "integrale tra a e b di f(x)dx" dove a è detto **estremo inferiore di integrazione**, b **estremo superiore di integrazione** ed f(x) è detta **funzione integranda**.

Il simbolo $\int$ deriva dalla deformazione della lettera S per ricordare che si ottiene da una somma.

Quindi $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta l'area sottesa alla curva di equazione y=f(x) nell'intervallo [a,b] solo se f(x)>0 per ogni x∈[a,b], ma la definizione è più generale: l'integrale può essere visto come una somma infinita estesa all'intervallo [a,b] del prodotto dell'incremento delle ascisse (dx) per l'ordinata.

- proprietà (linearità, additività e monotonia) e teorema media

Proprietà:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
3. **linearità:** $\int_a^b k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)dx = k_1 \int_a^b f_1(x)dx + k_2 \int_a^b f_2(x)dx$;

4. **additività:** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (vale anche nel caso in cui c sia esterno all'intervallo [a,b] se f è definita e continua negl'intervalli [a,b], [a,c] e [c,b]);
5. **monotonia:** se $a \le b$ ed $f(x) \le g(x)$ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;
6. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

La 1 e la 2 sono definizioni, le successive sono teoremi che vengono giustificati dalla loro interpretazione geometrica, per non appesantire la lezione con troppe dimostrazioni.

Teorema della media. Se *f* è continua in [a,b] allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

DIM. Essendo *f* continua in un intervallo chiuso è limitata, quindi, chiamati *m* e *M* il minimo e il massimo, per la proprietà di monotonia dell'integrale definito si ha

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

allora per il teorema di Darboux dei valori intermedi esiste un *c* tale che *f(c)=I/(b-a)*, da cui la tesi •

Il significato geometrico della media integrale, cioè della quantità $I_m = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$ è che l'area sottesa alla curva di equazione y=f(x) nell'intervallo [a,b] è uguale all'area del rettangolo di base (b-a) e altezza I_m per questo il valore f(c) è detto **valor medio** della funzione nell'intervallo [a,b].

Fase 4

Motivazione

Nelle lezioni precedenti si è mostrato come la definizione di integrale definito sia la più generale per definire l'area sottesa a una curva complessa. Si vuole ora mostrare che il metodo di calcolo suggerito dalla definizione, cioè la scelta di una partizione dell'intervallo e il calcolo del limite della somma delle aree dei rettangoli inscritti o circoscritti, è limitato, sia perché non applicabile a tutti i casi, sia perché non sempre economico.

Il modo migliore in questo caso è far "scontrare" gli studenti con il fatto che in certi casi il metodo richiede calcoli eccessivi, in altri non fornisce la soluzione; si propone quindi un'attività di gruppo.

Dovendo ricercare in prima persona il modo migliore per calcolare le aree proposte, gli studenti hanno anche la possibilità di capire come il metodo richieda spesso soluzioni ad hoc, e di sentire la necessità di uno strumento più generale, che verrà fornito nella lezione successiva.
Inoltre, dando esercizi diversi ai gruppi, al momento della discussione gli studenti si esercitano anche a riportare i loro risultati agli altri, quindi ad usare un linguaggio specifico e a sintetizzare.

Scaletta

- lavoro di gruppo: applicazione del metodo dei rettangoli a diversi casi
- discussione dei limiti del metodo

Ostacoli

- difficoltà a trovare soluzioni ad hoc senza il supporto di uno strumento algoritmico generale

Lezione

- lavoro di gruppo: applicazione del metodo dei rettangoli a diversi casi

Si propone a ogni gruppo uno dei seguenti esercizi di calcolo dell'area sottesa alle curve di equazione:

1. $y=x^2$ nell'intervallo [a, b]
2. $y=2^x$ in [0, a]
3. $y=\sqrt{x}$ in [0, 1]
4. $y=1/x$ in [1, a], $a \notin \mathbb{N}$
5. $y=1/x$ in [1, 2]
6. $y=x$ in [a, b]

Gli esercizi 1 e 2 sono applicazioni di quanto detto nelle lezioni precedenti, quindi non dovrebbero dare problemi nell'impostazione, cioè la scrittura delle somme superiori o inferiori riferite a una partizione con sottointervalli di uguale lunghezza; le difficoltà sono di calcolo, in particolare bisogna sapere la somma dei primi n interi e dei primi n quadrati in (1) e conoscere un limite notevole in (2). Gli esercizi sono quindi un'occasione di ripasso ma anche utili per evidenziare la non generalità e la macchinosità del metodo di calcolo derivato dalla definizione di integrale definito.
L'esercizio 3 richiede di trovare una partizione "ad hoc", che può essere suggerita in un secondo momento se gli studenti non ci pensano da soli. Nell'esercizio 4 questa ricerca dovrebbe fallire, mostrando i limiti del metodo anche per funzioni semplici.

Nell'esercizio 5 ci si aspetta che gli studenti arrivino a scrivere la somma dei reciproci; a questo punto si può fornire l'approssimazione che permette di calcolare il limite, che ancora più degli esercizi 1 e 2 dovrebbe dare l'idea della necessità di trovare una soluzione ad hoc caso per caso.
L'esercizio 6 non ha difficoltà di impostazione né di calcolo, e ci si aspetta che gli studenti osservino la scomodità di questo metodo rispetto al calcolo diretto dell'area del trapezio.

- discussione dei limiti del metodo

Si sollecita una discussione in cui i gruppi riportano il loro risultati, evidenziando quando il metodo risulta efficace (ess. 1 e 2), quando non permette di calcolare l'area (es. 4), quando non è economico (3, 5 e 6). Si può evidenziare in ogni caso la macchinosità e non generalità del metodo, in quanto richiede di conoscere le somme parziali di diverse successioni, o le somme di diverse serie infinite, e a volte di procedere per tentativi per trovare la partizione opportuna.

Fase 5

Motivazione

Si vuole presentare il teorema fondamentale del calcolo come strumento generale ed economico per il calcolo degli integrali definiti. Si è scelta in questo caso la modalità della lezione frontale perché non si vuole costruire un nuovo concetto o strumento a livello intuitivo ma formalizzare un teorema che richiede l'introduzione di alcune definizione preliminari (funzione integrale e primitiva) e che non può essere "scoperto" in tempi ragionevoli attraverso un'attività da parte degli studenti.

Scaletta

- Definizione funzione integrale e interpretazione geometrica
- Definizione di primitiva
- Teorema di Torricelli o teorema di inversione
- Teorema fondamentale del calcolo

Ostacoli

- difficoltà relativa alla funzione integrale: difficoltà a trattare una funzione di cui non si ha presente il grafico, ma i cui valori dipendono dall'area sottesa al grafico di un'altra. Può diventare un ostacolo didattico se le funzioni sono sempre state presentate associate a una curva nel piano cartesiano

Lezione

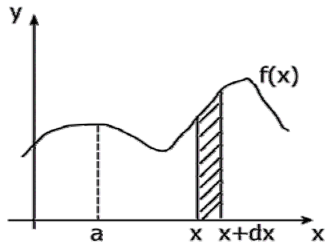
Vogliamo trovare uno strumento di calcolo degli integrali definiti più generale e che richieda meno calcoli del metodo usato finora. Vedremo che il calcolo degli integrali definiti si ridurrà alla ricerca di funzioni la cui derivata è la funzione da integrare.

Introduciamo a tale scopo la *funzione integrale*:

data una funzione f:D⊆ℝ→ ℝ, integrabile su [a,b]⊆D si definisce funzione integrale la funzione

$$\Phi\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$



che si può interpretare geometricamente come la funzione che associa a ogni punto dell'intervallo [a,b] l'area sottesa alla curva di equazione y=f(x) nell'intervallo [a,x].

Possiamo intuire l'utilità di questa funzione considerando i due trapezoidi Φ(x) e Φ(x+dx) mostrati in figura. La differenza Φx+dx)-Φ(x) è l'area tratteggiata; per il teorema della media, esiste un punto $x < c < x+dx$ tale che Φ(c)dx = Φ(x+dx)-Φ(x), cioè il rapporto incrementale [Φ(x+dx)-Φ(x)]/dx = Φ(c) è l'altezza di un rettangolo di base dx e area pari a quella tratteggiata. Per dx→0 intuitivamente ci aspettiamo che il trapezoide tratteggiato diventi un rettangolo di base infinitesima dx e altezza f(x), per cui:

$$f(x) = \lim_{dx\to 0} \frac{\Phi(x+dx)-\Phi(x)}{dx}$$

cioè Φ(x)=f(x). Quindi, se vogliamo calcolare l'integrale I=$\int_a^b f(t)dt$, per come abbiamo definito la funzione integrale, Φ(b)=I, cioè il calcolo integrale è stato ricondotto alla ricerca di un'opportuna funzione Φ che ha per derivata la funzione integranda *f* e al suo calcolo in un estremo di integrazione.

Formalizziamo quanto detto in precedenza: data una funzione f:D⊆ℝ→ ℝ, una funzione F:D⊆ℝ→ ℝ si dice *primitiva della funzione f* se, per ogni x∈D, F'(x)=f(x). La funzione primitiva non è unica, perché basta sommare alla funzione F trovata una funzione costante, perché la derivata sia ancora la f.

Il risultato che abbiamo introdotto intuitivamente è formalizzato dal teorema di Torricelli:

IP: sia data la funzione f: D⊆ℝ→ ℝ, continua in [a,b] ⊆D

TS: la funzione integrale Φ: [a,b]→ ℝ, x ↦ $\int_a^x f(t)dt$ è derivabile in [a,b] e Φ'(x)=f(x) per ogni x∈[a,b]

DIM. Consideriamo x∈[a,b] e un incremento h:

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]=\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$$

per il teorema della media, esiste un c∈[x,x+h] se h>0, oppure c∈[x+h,x] se h<0, tale che:

$$f(c)\cdot h=\int_x^{x+h}f(t)dt$$

da cui

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt=\frac{1}{h}f(c)\cdot h=f(c)$$

per h→0, essendo c compreso tra x e x+h, c→x quindi, essendo f continua,

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)=f(x)$$

cioè la tesi. QED

Questo risultato ci permette di dimostrare un teorema che consente di calcolare in modo relativamente semplice un integrale definito, e che per questo viene chiamato *teorema fondamentale del calcolo*:

IP: sia data la funzione f: D⊆ℝ→ ℝ, continua in [a,b] ⊆D e una sua primitiva F:[a,b]→ ℝ

TS: F(b) - F(a) = $\int_a^b f(t)dt$

DIM. Per il teorema di Torricelli e le ipotesi, la funzione F e la funzione integrale Φ hanno la stessa derivata f nell'intervallo chiuso [a,b], quindi differiscono per una costante *k*, quindi:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+k$$

cioè, essendo F(a) = $\int_a^a f(t)dt$ +k = k,

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+F(a)$$

da cui

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt+F(a)$$

da cui la tesi. QED

Fase 6

Motivazione

La definizione di integrale viene necessariamente proposta con una lezione frontale.

Le tecniche verranno introdotte in modo applicativo fornendo le sottostanti tabelle senza ulteriori spiegazioni e chiedendo di eseguire singolarmente gli esercizi suggeriti per ogni tipo. Riteniamo infatti che una volta chiaro il concetto di integrale indefinito, sia più efficace un approccio pratico ed individuale. In classe si discuterà di eventuali difficoltà e dubbi.

Scaletta

- Definizione di integrale indefinito
- tecniche di calcolo: immediati, funzioni fratte, sostituzione, per parti con esercizi applicativi

Ostacoli

- Lavorare in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Lezione

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO

Questo argomento richiede una buona padronanza delle regole di derivazione, e deve sviluppare abilità nella tecnica di integrazione di seguito esposta: si presenta quindi più semplice rispetto ai precedenti che invece presentavano difficoltà concettuali.

Data la funzione *f*, l'allievo sa calcolare la derivata prima *f'* e sa che se esiste è unica. Egli sa che l'operatore derivata prima è lineare. In questo paragrafo l'allievo dovrà eseguire l'operazione inversa alla derivazione: data una funzione *f*, determinare una funzione che ammetta *f* come derivata. Per questa proprietà la funzione incognita verrà chiamata primitiva. Poiché la derivata di una funzione costante è nulla, $D_x(F+k) = F' = f$, cioè esistono infinite primitive della stessa funzione.

Allora non si può definire un operatore inverso dell'operatore di derivazione, ma la sua relazione inversa (detta integrazione), che associa a una funzione *f* tutte e sole le sue primitive. L'immagine di una funzione *f* attraverso l'integrazione si chiama ***integrale indefinito di f*** e si rappresenta col simbolo:

$$\int f(x)dx = \left\{ F \in \mathbb{R}^D \mid F' = f \right\}$$

dove D è il dominio della *f*. Se *f* è definita su un intervallo, per il terzo corollario del teorema di Lagrange tutte le primitive differiscono per una funzione costante, quindi trovata una primitiva F_0, la famiglia $\{F_0+k\}$, con $\underline{k}$ funzione costante $\underline{k}$: $D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto k$, definisce tutte e sole le primitive di *f*, cioè

$$\int f(x)dx = \left\{ F \in \mathbb{R}^D \mid (\exists k \in \mathbb{R})(F = F_0 + \underline{k}) \right\} := \left\{ F_0 + \underline{k} \right\} \qquad (*)$$

In generale, con $\int f(x)dx$ si intende che il dominio di *f* è il suo insieme di esistenza, quindi se non si specifica una restrizione su un intervallo, in generale la scrittura {F_0+k} non rappresenta tutte le primitive, quindi l'uguaglianza (*) è errata. Nei problemi di calcolo degli integrali indefiniti, si cercherà quindi una sola primitiva F, e si scriverà $\int f(x)dx$ =F(x), dove F(x) è un rappresentante della classe di equivalenza generata dall'integrale, omettendo la costante k abusata nei libri di testo (vedi l'analisi dei libri di testo al paragrafo successivo).

Proprietà dell'integrale indefinito

Date due funzioni *f* e *g* integrabili:

1. costante moltiplicativa: $\forall k \in \mathbb{R}, \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

2. additività: $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. linearità: $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \int [k_1 f(x)+k_2 g(x)]dx = k_1\int f(x)dx + k_2\int g(x)dx$

TECNICHE DI CALCOLO

La difficoltà del calcolo integrale è riconducibile alla ricerca di una primitiva: vediamo di catalogare le funzioni in modo da ricondursi velocemente alle primitive. L'insegnante consegnerà agli studenti la sottostante tabella senza ulteriori commenti chiedendo di calcolare gli integrali della colonna "esercizi" aiutando singolarmente l'allievo in caso di difficoltà.

INTEGRALI IMMEDIATI

funzioni	Integrali immediati	primitiva	esercizi
polinomio	$\int x^{\alpha} dx$ α≠-1	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\int x^{\sqrt{2}+1}dx$ $\int \frac{2\ln(x)}{x}dx$
Prodotto di due funzioni di cui una esponenziale	$\int e^{f(x)} f'(x)dx$	$e^{f(x)}$	$\int e^{senx} \cos x dx$
Prodotto di due funzioni di cui una esponenziale	$\int e^{x} f'(e^{x})dx$	$f(e^{x})$	$\int e^{x}\sqrt{1+e^{x}}dx$
Prodotto di due funzioni	$\int f'(x)g'(f(x))dx$	$g(f(x))$	Vedi integrazione per sostituzione di variabile
Funzioni razionale fratte con denominatore $\sqrt{1-(f(x))^2}$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx$	arcsen(f(x))	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Funzioni razionale frazionaria con denominatore $1+f^2(x)$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$	arctg(f(x))	$\int \frac{2x}{1+x^2}dx$
Funzioni razionale frazionaria	$\int \frac{f(x)'}{f(x)}dx$	$\ln\|f(x)\|$	$\int tg(x)dx$
Funzioni razionale frazionaria	$\int -n\frac{f'(x)}{f^{n+1}(x)}dx$	$[f(x)]^{-n}$	

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI FRAZIONARIE CON DENOMINATORE POLINOMIALE DI II GRADO: $\int \frac{P_n(x)}{x^2+px+q}dx$

Numeratore: P_n	**Denominatore: Δ**	**tecnica**	**esempio**
n = 1 $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$	$\Delta > 0$	Scomporre il denominatore in fattori ($x-x_1$)($x-x_2$) e si trovano due coefficienti a , b tali che $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx =$ $\int \frac{a}{x-x_1}dx + \int \frac{b}{x-x_1}dx =$ $a\ln\|x-x_1\| + b\ln\|x-x_2\|$	$\int \frac{3x-2}{x^2+x}dx$
n = 1 $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$	$\Delta = 0$	Aggiungere e togliere Ax_1 al numeratore $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx =$ $\int \frac{A(x-x_1)}{(x-x_1)^2}dx + \int \frac{Ax_1+B}{x-x_1}dx =$ $A\ln\|x-x_1\| - (Ax_1+B)(x-x_1)^{-2}$	$\int \frac{2x}{2x^2-2x+1}dx$
n = 1 $\int \frac{B}{x^2+px+q}dx$	$\Delta < 0$ A = 0	Tramite trucchi algebrici cercare di far comparire a denominatore : $1 + f^2(x)$ in modo che la funzione integrale sia una arctg (f(x))	$\int \frac{1}{x^2+2x+2\pm 1}dx$ $= arctg(x+1)$

n = 1 $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$	$\Delta < 0$ A $\neq 0$	Controllare se ci si può ricondurre a $\int \frac{f(x)'}{f(x)}dx$ altrimenti tramite trucco algebrico mettere in evidenza la precedente formula e separare l'integrale in due di cui uno porterà alla funzione logaritmica, ed il secondo alla funzione arcotangente	$\int \frac{2x(\pm 2)+3}{x^2-2x+10}dx =$ $\ln(x^2-2x+10)+$ $+arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)$
n ≥ 2 $\int \frac{P_n}{ax^2+bx+c}dx$ $=\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$		Eseguire la divisione tra numeratore e denominatore $\frac{Q(x)D(x)+R(x)}{D(x)} = Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$ per scomporre la funzione integrando nella somma tra un polinomio e di una frazione algebrica con numeratore di grado inferiore al denominatore ricadendo nei casi delle prime 4 righe	$\int \frac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+1}dx$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Dato il seguente integrale: $\int f(x)g(x)dx$, se una delle due funzioni (ad esempio g) può essere vista come la derivata di un'altra funzione (ad esempio G), allora, per la proprietà della derivata del prodotto di due funzioni risulta:

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

Consegna : $\int xe^x dx = (x-1)e^x$

La tecnica di integrazione per parti ripetuta, si utilizza per l'integrazione di funzioni cicliche ovvero per quelle funzioni per le quali la derivata ennesima coincide con la funzione stessa ad esempio e^x, Ch(x), Sh(x), cos(x) , sen(x).

Esempio guidato eseguito dall'insegnante:

$$\int sen(x)e^x dx = senx\cdot e^x - \int \cos(x)e^x dx = senx\cdot e^x - \left[\cos x\cdot e^x - \int -sen(x)e^x dx\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \int sen(x)e^x dx = \frac{1}{2}[(senx - \cos x)e^x]$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Per calcolare alcuni integrali non immediati, conviene eseguire una trasformazione di variabile x = g(t) che sia invertibile ed applicare la regola di integrazione delle funzioni composte.

Esempio guidato eseguito dall'insegnante: $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x + 1} dx$ utilizzando la variabile ausiliaria t = e^x da cui dt = t dx. l'integrale diventa quindi: $\int \frac{1}{t^2 - 2t + 1} dt = -(t-1)^{-1} = -(e^x - 1)^{-1}$

Questa tecnica è molto utilizzata per calcolare l'integrale di funzioni goniometriche assieme alle formule di bisezione.

Consegna: Verifica che $\int \frac{1}{senx} dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ operando la sostituzione t = tg(x/2) sapendo che

$senx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ Ricorda che l'invertibilità della tangente è garantita tra

$-\pi/2 < x/2 < +\pi/2$

Analisi dei libri di testo: l'integrale indefinito

Come abbiamo mostrato, esprimere l'insieme delle primitive individuato dall'integrale indefinito nella forma *F(x)+c* è corretto solo nel caso in cui la funzione integranda sia definita su un intervallo. Il problema del calcolo dell'integrale indefinito è legato a quello del calcolo dell'integrale definito, e quindi limitare la ricerca delle primitive alla restrizione della funzione integranda all'intervallo di integrazione non ha effetti sul calcolo dell'integrale definito. Tuttavia, ai fini dell'applicazione del teorema fondamentale del calcolo è sufficiente trovare una primitiva, quindi non ha senso limitare un problema più generale, che può essere definito autonomamente (la ricerca di tutte e sole le primitive di funzioni reali di variabile reale, con dominio qualsiasi), solo per salvare un'abitudine di scrittura e con la scusa che il problema così limitato è sufficiente per le applicazioni.

In questo lavoro si è scelto quindi (vedi fase 6) di definire il problema generale, di evidenziare i casi in cui può essere risolto esplicitamente, e di distinguere la sua applicazione ai fini del calcolo di integrali definiti, per cui è sufficiente trovare una sola primitiva.

Nei libri di testo, in generale si usa la notazione abituale $\int f(x)dx = F(x) + c$, tralasciando di definire l'integrale come insieme di funzioni (limitandosi a un'idea intuitiva di processo che individua le primitive di una funzione) o dando definizioni errate (di operatore inverso della derivata); solo in pochi casi si chiariscono le convenzioni di scrittura o la scelta di restringere il problema alle funzioni definite su un intervallo. Si riportano alcuni esempi.

Ciolli-Michelassi [2] definisce l'integrazione indefinita come operazione inversa della differenziazione, pur facendo notare che la primitiva non è unica. Non pone restrizioni sul dominio, ma discute l'esempio di $\int \frac{1}{x} dx$ e dice che, per adeguarsi alla scrittura abituale $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, "l'uguaglianza deve essere intesa nel senso che la restrizione di una qualsiasi primitiva della funzione integranda a ciascuno degli intervalli del dominio differisce da F(x) per una costante".

Lamberti-Mereu [3] definisce l'integrale indefinito come "totalità delle primitive", e specifica che la scrittura abituale è una convenzione che sottintende un insieme di funzioni, cioè $\int f(x)dx = \{F(x) + c\}$. Enuncia correttamente il teorema per cui le primitive differiscono per una costante se definite su un intervallo, ma non limita l'integrale alle funzioni definite su un intervallo, usando scritture del tipo $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ senza ulteriori commenti.

Zwirner [4] definisce l'integrale indefinito come "totalità delle primitive", o "la più generale delle primitive", dopo aver definito le primitive solo di funzioni definite su un intervallo, deducendo che l'operazione di integrazione è l'operazione inversa della derivazione. Utilizza la scrittura usuale senza commenti. Approccio simile in Dodero [5], con l'aggravante che non specifica mai il dominio delle funzioni di cui parla, e definisce non l'integrazione, ma l'integrale indefinito come operatore inverso della derivata, confondendo l'operazione con la sua immagine, oltre a non considerare che la derivazione non è invertibile.

Bagni [6] definisce l'integrale di una funzione con dominio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ qualsiasi, come l'insieme delle *espressioni* delle funzioni primitive, probabilmente per adeguarsi alla scrittura usuale, ma dicendo poi che l'integrale è un insieme di funzioni, scrivendo $\int f(x)dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$, confondendo le funzioni con la loro espressione analitica. Si adegua poi alla scrittura abituale $\int f(x)dx = F(x) + c$ senza commenti sulla convenzione di scrittura, e scrive $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, che risulta errato secondo le sue definizioni.

Bibliografia

[1] F. Conti "Calcolo", Mc Graw-Hill

[2] M. Ciolli, L. Michelassi “Corso di Matematica”, Prinicipato

[3] L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni “Corso di Matematica”, ETAS

[4] G. Zwirner, L. Scaglianti “L’indagine Matematica”, CEDAM

[5] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi “Lineamenti di Matematica”, Ghisetti e Corvi

[6] G. T. Bagni “Corso di Matematica”, Zanichelli

[7] M. Andreini, R. Manara, F. Prestipino, “Matematica in controluce”, ETAS

Sommario