FUNZIONI ECONOMICHE

Servono a descrivere come variano alcune quantità di interesse economico, come i costi di produzione, il ricavo, la domanda o l'offerta al variare di un'altra quantità, come il prezzo o il tempo.

DOMANDA e OFFERTA

Definizione e proprietà:

DOMANDA

n° di persone disposte a comprare un bene al variare del prezzo p

$d(p)$

OFFERTA

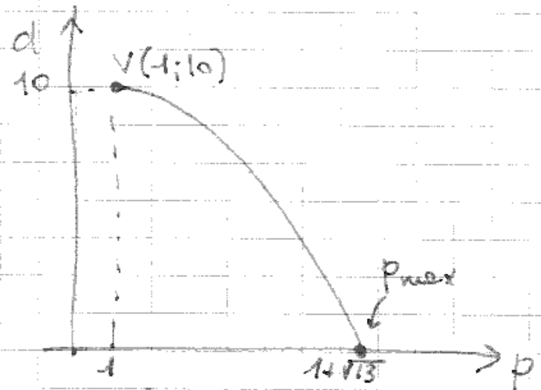
n° di beni immessi nel mercato al variare del prezzo p

$q(p)$

p, d e q devono essere positivi

d è non crescente | q è non decrescente

dalle proprietà si ricavano D e C:



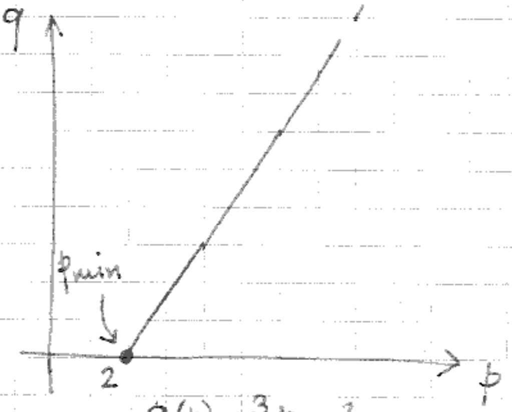
$d(p) = -p^2 + 2p + 9$

Per rispettare positività e decrescenza:

$D = [1; 1+\sqrt{13}]$ $\quad C = [0; 10]$

La sua funzione inversa è la FUNZIONE DI VENDITA $p(d)$ che si trova scambiando D e C e ricavando p in funzione di d:

$$p(d) = 1 + \sqrt{10-d}$$



$q(p) = \frac{3}{2}p - 3$

Per rispettare positività e crescenza:

$D = [2; +\infty)$ $\quad C = [0; +\infty)$

La sua funzione inversa è la FUNZIONE DI PRODUZIONE $p(q)$

$$p(q) = \frac{2}{3}q + 2$$

Il PREZZO viene stabilito dal produttore in caso di regime monopolistico. In caso di regime di concorrenza perfetta, è stabilito dal mercato, come PREZZO DI EQUILIBRIO, cioè quando

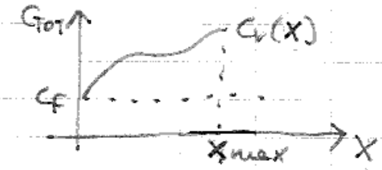
$$d(p) = q(p)$$

COSTO TOTALE E MEDIO

In generale i costi di produzione si dividono in FISSI (acquisto locali e impianti, stipendi ecc) e VARIABILI che dipendono dalla quantità prodotta (es il costo della materia prima).

Allora si può definire la funzione COSTO TOTALE

$$C_{TOT}(X) = C_f + C_v(X)$$



Se c'è un limite di produzione q_{max}:

$$D = [0; X_{max}] \qquad C = [C_f; C_{TOT}(X_{max})]$$

Se si produce di più, si spende di più ma se si riesce a vendere si guadagna anche di più, quindi non ha senso minimizzare il costo totale.

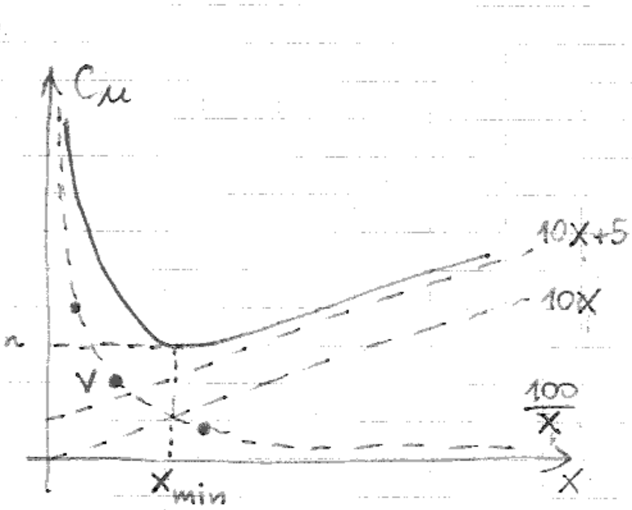
Quello che conta è ridurre il costo per unità di merce prodotta, cioè il COSTO MEDIO O UNITARIO

$$C_{\mu}(X) = \frac{C_{TOT}(X)}{X}$$

Esempio:

$$C_{TOT} = 100 + 5X + 10X^2$$

$$C_{\mu} = \frac{100}{X} + 5 + 10X$$



Il grafico è la somma della parte lineare e dell'iperbole

Per disegnare l'iperbole data un'equazione del tipo $y = \frac{k}{x}$, si trova il vertice $V(\sqrt{k}; \sqrt{k})$ e altri due punti dando due valori alla x:

$V(10; 10)$

x	y
5	20
20	5

Il minimo di $C_{\mu}(X)$ si trova uguagliando il termine $\frac{k}{x}$ e quello proporzionale a X:

$$\frac{100}{X_{min}} = 10X_{min} \rightarrow X_{min} = \sqrt{10} \rightarrow C_{\mu}(\sqrt{10}) = C_{\mu min}$$

Il grafico di C_{μ} è una curva che si avvicina all'iperbole per x piccole, alla retta per x grandi, e ha un minimo in X_{min}.

Se $C_{\mu min} > p$ l'azienda deve uscire dal mercato perchè anche minimizzando il costo unitario, spenderebbe di più di quello che ricaverebbe su ogni prodotto venduto.

RICAVO TOTALE e MEDIO

Il ricavo dipende dal prezzo del prodotto venduto e dalla quantità venduta:

$$R = x \cdot p$$

quindi in generale è funzione di p e di x.
Siccome c'è un legame tra p e x si può esprimere il ricavo come funzione di una sola delle due quantità

REGIME DI concorrenza perfetta	REGIME DI monopolio
Il prezzo è fissato dall'equil tra domanda e offerta:	Il prezzo è deciso dal monopolista. Il legame tra p e x è dato dalla funzione di vendita:
$d(p) = q(p) \Rightarrow p = p_{eq}$	$x = d(p) \rightarrow p = d^{-1}(x)$
$R(x) = x \cdot p_{eq}$	$R(x) = x \cdot d^{-1}(x)$

Dominio e codominio si trovano imponendo i vincoli

$$R \geq 0 \ , \ x \geq 0 \ , \ p \geq 0$$

Il RICAVO MEDIO o UNITARIO, è il ricavo per unità di prodotto venduto:

$$R_m(x) = \frac{R(x)}{x}$$

In regime di conc perfetta : $R_m(x) = \dfrac{x \cdot p_{eq}}{x} = p_{eq}$

In regime di monopolio : $R_m(x) = \dfrac{x \cdot d^{-1}(x)}{x} = d^{-1}(x)$

UTILE o PROFITTO o GUADAGNO

Il profitto è definito come $U = R - C$.
Essendo R e C funzioni della quantità prodotta X, anche U è funzione di U.

Esempio: $R(X) = -10 + 5X$, $C(X) = 6 + X$ $\rightarrow$ $U(X) = 4X - 16$

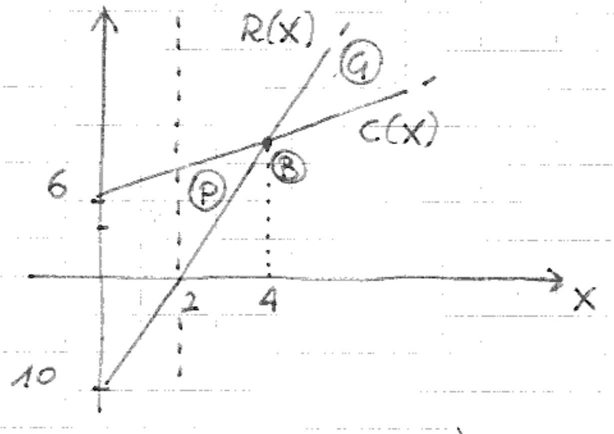


DIAGRAMMA DI REDDITIVITÀ

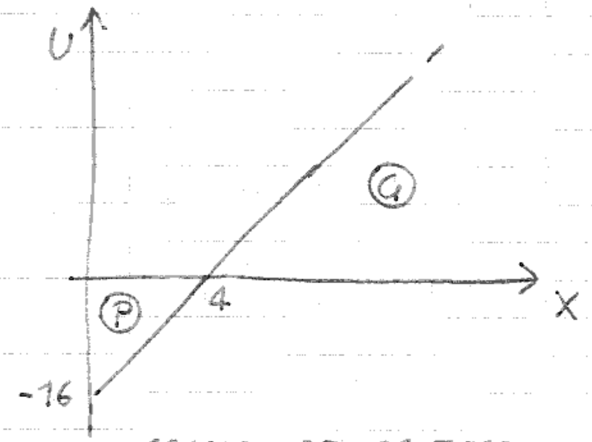
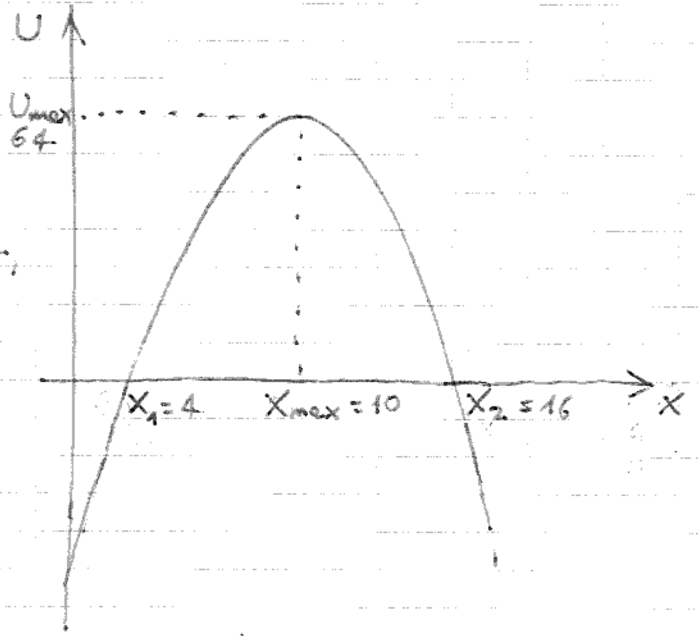


GRAFICO DEL PROFITTO

Dal diagramma di redditività si vede che il dominio è $[2; +\infty)$ perché il ricavo per $X < 2$ diventa negativo. Inoltre, dal confronto tra R e C si vede che per $2 < X < 4$ si lavora in perdita, mentre per $X > 4$ si guadagna e per $X = 4$ si è in pareggio. Graficamente, la zona Ⓟ si chiama AREA DI PERDITA, e la Ⓖ AREA DI GUADAGNO. Il punto di pareggio Ⓑ si chiama anche BREAK-EVEN POINT.

Dal grafico del profitto si può individuare l'area di perdita e di guadagno, ma non il dominio perché il profitto non ha vincoli di segno. Quindi il dominio deve essere individuato sulle funzioni R e C separatamente.

Dal grafico del profitto si trovano facilmente la quantità che massimizza il profitto, e l'intervallo di valori di X per non lavorare in perdita



Esempio:

$$U(x) = -x^2 + 20x - 64$$

Il massimo è il vertice della parabola, quindi si ha producendo una quantità

$$x = -\frac{b}{2a} = 10$$

Non si lavora in perdita per $x_1 < x < x_2$ che si trovano ponendo $U(x) = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 64}}{-2}$$

N.B. se $x \in \mathbb{N}$, l'arrotondamento si fa in modo che $U(x) > 0$ e non al più vicino

PROBLEMI DI SCELTA

- Classificazione in base a:
  - condizioni (certezza / incertezza)
  - effetti (immediati / differiti)

METODI DI RISOLUZIONE

- CONDIZIONI DI CERTEZZA CON EFFETTI IMMEDIATI

• Classificazione in base a:

- tipo di scelta (ottimo / alternative)
- tipo di variabile (continua / discreta)

• Soluzione:

1) Si definisce la funzione che descrive il problema (FUNZIONE OBIETTIVO) tenendo conto di eventuali vincoli (TECNICI, DI SEGNO)

2) Si rappresenta graficamente

3) Se il problema è di ottimo, si individua il massimo (o il minimo); se è di scelta tra alternative si individua l'alternativa più conveniente confrontando i grafici

- CONDIZIONI DI CERTEZZA CON EFFETTI DIFFERITI

• Sono tutti scelte tra alternative

• Criteri:

- PREFERENZA ASSOLUTA
  Si confrontano direttamente le somme, senza calcoli

- RISULTATO ECONOMICO ATTUALIZZATO (r.e.a.)
  Si calcola il rea di ogni alterna sommando i valori attuali degli importi;
  si sceglie l'alternativa con il rea più conveniente

- TASSO DI RENDIMENTO INTERNO (t.i.r.)

  t.i.r. = tasso che rende nullo il r.e.a.

  Si calcola il rea di ogni alternativa e quindi il tir
  Si sceglie l'alternativa:
  - con tir più alto in caso di investimenti
  - con tir più basso in caso di finanziamenti / prestiti

□ CONDIZIONI DI INCERTEZZA CON EFFETTI IMMEDIATI

- Sono di ottimo o tra alternative, in ogni caso nel discreto
- Criteri:

  - DELL'OTTIMISTA E DEL PESSIMISTA
    si individua il caso migliore (peggiore) di ogni alternativa, e si sceglie l'alternativa che ha tra questi il valore più conveniente

  - DEL VALOR MEDIO
    si calcola il valor medio di ogni alternativa:

    $$M = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

    Quindi si sceglie l'alternativa con il valor medio più conveniente

  - DELLA VALUTAZIONE DEL RISCHIO
    si calcola il valor medio di ogni alternativa e il suo scarto quadratico medio:

    $$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - M)^2 + p_2 (x_2 - M)^2 + \dots + p_n (x_n - M)^2}$$

    si scartano le alternative con $\frac{\sigma}{M} > K$, dove K è una soglia di rischio stabilita.

    Tra le alternative rimaste si sceglie la più conveniente

RICERCA OPERATIVA

Insieme di tecniche finalizzate a trovare il modo migliore per ottimizzare un'attività. È un termine generico che include applicazioni industriali, urbanistiche, finanziarie...

FASI GENERALI DELLA RO

- analisi della situazione: raccolta dati e informazioni
- costruzione di un modello matematico (funzione obiettivo, vincoli)
- ricerca della soluzione

ESEMPI

1. PROBLEMI DI SCELTA
2. PROGRAMMAZIONE LINEARE
3. PROBLEMA DELLE SCORTE

2) PROGRAMMAZIONE LINEARE

Serve a risolvere problemi di massimo e minimo dove la funzione obiettivo e i vincoli sono lineari

ESEMPIO. Una ditta produce due oggetti A e B. I dati sono i seguenti:

	prodotto A	prodotto B	max
materie prime (kg)	2	1	65
lavoro macchina (min)	45	60	2400
prezzo unitario (€)	20	23	

Trovare la quantità ottimale da produrre per massimizzare il ricavo.

MODELLO MATEMATICO.

Variabili: x = quantità prodotta dell'oggetto A (in pezzi)
y = quantità prodotta dell'oggetto B (in pezzi)

Funz. obiettivo: $R(x,y) = 20x + 23y$

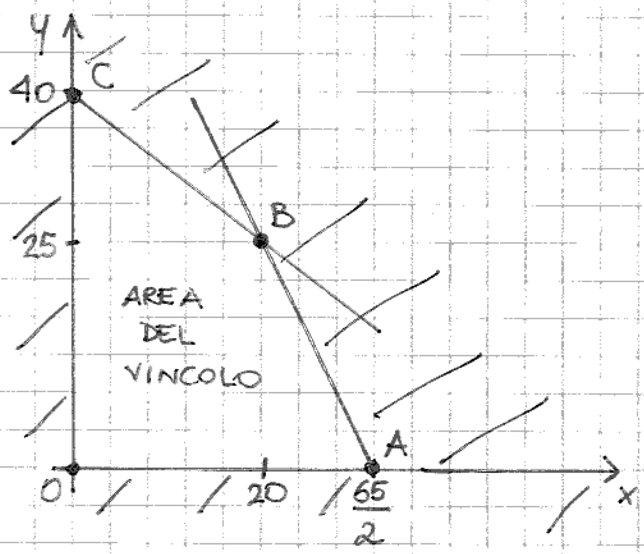
Vincoli:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 & \text{di segno} \\ 2x + y \leq 65 & \text{tecnico} \\ 45x + 60y \leq 2400 & \text{tecnico} \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si rappresentano i vincoli esplicitando una variabile:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ y \leq -2x + 65 \\ y \leq -\frac{3}{4}x + 40 \end{cases}$$



La funzione ricavo,

$$R(x, y) = 20x + 23y$$

essendo lineare, è rappresentata da una porzione di piano. Si può dimostrare che il massimo (o il minimo) si trova in corrispondenza di uno dei vertici del bordo del vincolo.

Quindi si trovano le coordinate dei vertici:

$O(0;0)$ $\quad C\begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases}$ $\quad A\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{65}{2} \end{cases}$ $\quad B\begin{cases} y = -2x + 65 \\ y = -\frac{3}{4}x + 40 \end{cases}$

$C(0;40)$ $\quad A\left(\frac{65}{2};0\right)$ $\quad B(20;25)$

Poi si calcola la funzione obiettivo nei punti trovati:

$$R(O) = R(0;0) = 0$$

$$R(C) = R(0;40) = 20 \cdot 0 + 23 \cdot 40 = 920$$

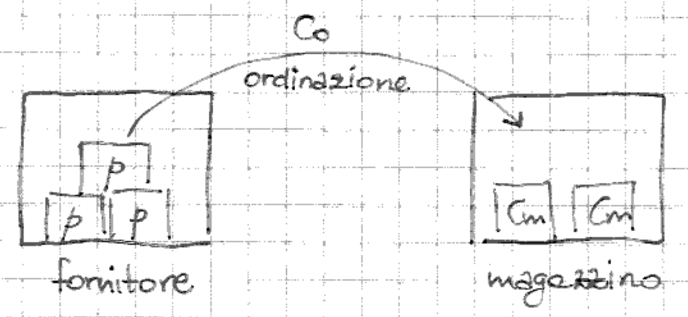
$$R(A) = R\left(\frac{65}{2};0\right) = 20 \cdot \frac{65}{2} + 23 \cdot 0 = 650$$

$$R(B) = R(20;25) = 20 \cdot 20 + 23 \cdot 25 = 975$$

Il ricavo massimo si ha per $x = 20$ e $y = 25$.

③ PROBLEMA DELLE SCORTE

Supponiamo di produrre degli oggetti che richiedono l'acquisto di materia prima e il suo stoccaggio prima di venire utilizzato, o di acquistare dei prodotti che restano in magazzino prima di venire rivenduti.
Ci chiediamo quale quantità conviene ordinare per volta per minimizzare i costi.



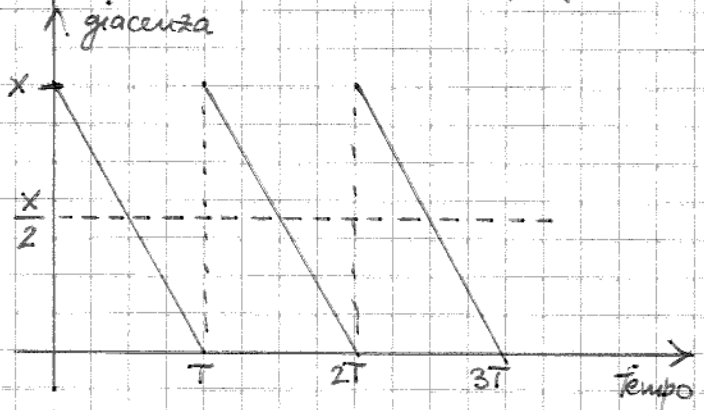
C_m = costo unitario di magazzino
C_o = costo ordinazione
p = prezzo merce
Q = qtà totale ordinata

MODELLO MATEMATICO

- Variabile: x = quantità ordinata (lotto economico)
- Funzione obiettivo: $C(x)$

Per trovare $C(x)$, si fanno delle ipotesi che semplificano il problema:

- Il consumo di materiale è costante
- si ordina sempre la stessa quantità x
- si ordina dopo aver esaurito le scorte, e il rifornimento è immediato



Sotto queste ipotesi:

$$C(x) = \underbrace{C_m \cdot \frac{x}{2}}_{\text{magazzino}} + \underbrace{C_o \cdot \frac{Q}{x}}_{\text{ordinazioni}} + \underbrace{p \cdot Q}_{\text{merce}}$$

SOLUZIONE

$C(x)$ è una funzione del tipo $y = a + bx + \frac{c}{x}$ quindi il minimo si trova uguagliando bx e c/x:

$$C_m \frac{x}{2} = C_o \frac{Q}{x}$$

$$x = \sqrt{\frac{2 C_o Q}{C_m}} \quad \text{LOTTO ECONOMICO}$$

da cui si trovano n, T e $C(x_{min})$