La conduzione elettrica nei metalli: le leggi di Ohm

Gli esperimenti condotti da Ohm negli anni '20 del XIX secolo hanno portato a formulare le seguenti leggi che descrivono la conduzione elettrica nei solidi metallici:

$$\Delta V = RI \tag{1}$$

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{2}$$

dove ΔV è la differenza di potenziale agli estremi di un tratto di filo di sezione S e lunghezza l, ρ è la resistività e I è la corrente che scorre nel filo.

1 Natura della legge

Queste leggi sono *fenomenologiche*, cioè si ricavano sperimentalmente ma non possono essere dedotte matematicamente da leggi fondamentali. Si distinguono quindi, ad esempio, dalla legge di Gauss che si può dimostrare dalla legge di Coulomb.

2 Interpretazione macroscopica

La prima legge di Ohm è una legge di proporzionalità tra ΔV e I, valida per valori arbitrariamente piccoli delle due grandezze. Differisce quindi dalla legge di Hooke nel senso che non esiste un valore minimo di ΔV da applicare per "attivare" il fenomeno, ma descrive un passaggio di corrente anche per valori piccolissimi di ΔV, e quindi del campo elettrico. Questo suggerisce che la carica che contribuisce al trasporto è libera di muoversi nel conduttore.

D'altra parte, la misura di una corrente costante in presenza di un campo elettrico costante, suggerisce la presenza di un effetto frenante analogo all'attrito, tale da rendere il moto dei portatori di carica uniforme anziché accelerato. Questo effetto frenante è descritto dalla seconda legge di Ohm, che è stata interpretata storicamente in analogia al passaggio di un liquido in un condotto. Questa analogia aveva senso quando la corrente elettrica era considerata come un "fluido elettrico", mentre oggi è chiaro che i meccanismi di resistenza nel caso di un fluido o di una corrente elettrica sono completamente diversi; mentre nel primo caso si divide il fluido in diversi strati, che allontanandosi dalle pareti del condotto scorrono a velocità sempre maggiore, con il risultato che la velocità media aumenta all'aumentare della sezione del condotto, non esiste un meccanismo analogo che spieghi macroscopicamente la seconda legge di Ohm, che deve essere invece descritta in termini di struttura microscopica della materia.

3 Interpretazione microscopica

Nel 1900 Drude propone un modello per la conduzione nei metalli che concilia la libertà dei portatori di carica con la presenza di un effetto frenante, descrivendo la conduzione come il passaggio di elettroni liberi accelerati dal campo elettrico, ma rallentati nel loro percorso da continui urti con gli atomi del reticolo metallico. Se fossero completamente liberi, gli elettroni percorrerebbero un tratto L di filo, in cui c'è un campo E, di moto uniformemente accelerato con accelerazione eE/m, cioè in un tempo

$\Delta t = \sqrt{(2Lm/eE)}$. A causa degli urti, che allungano il percorso e fanno perdere velocità agli elettroni, impiegheranno in generale un tempo molto più lungo, a una velocità media $v_d = L/\Delta t$, che viene detta *velocità di deriva*, per indicare che è la velocità netta che viene osservata e che contribuisce allo spostamento dell'elettrone. Se nel suo percorso l'elettrone subisce N urti, possiamo trovare il tempo medio tra un urto e l'altro da $\tau = \Delta t/N$ e la distanza media tra un urto e l'altro (detta *libero cammino medio*) da $\ell = L/N$, cioè possiamo esprimere la velocità di deriva come $v_d = \ell/\tau$.

Vediamo come il modello microscopico riproduce le leggi di Ohm. Per far questo mostriamo prima che dimostrare le equazioni (1) e (2) è equivalente a dimostrare che la velocità di deriva è proporzionale al campo elettrico.

Infatti, definendo la *densità di corrente* $J = I/S$, dalle leggi di Ohm si ha:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{1}{S}\frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\rho L} = \frac{1}{\rho}E = \sigma E \rightarrow J = \sigma E \tag{3}$$

dove abbiamo definito $\sigma = 1/\rho$ la *conducibilità* del materiale. D'altra parte, la corrente elettrica è la carica che attraversa la sezione S in un intervallo di tempo Δt, cioè la carica che si trova entro una distanza $v_d\Delta t$ dalla sezione. Quindi la densità di corrente si può scrivere anche:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{\Delta Q}{S\Delta t} = \frac{nev_d\Delta t \cdot S}{S\Delta t} = nev_d \rightarrow J = nev_d \tag{4}$$

dove n è il numero di elettroni per unità di volume ed e la carica dell'elettrone. Allora le leggi di Ohm scritte nella forma (3) equivalgono a dimostrare che la velocità di deriva è proporzionale al campo E.

Calcoliamo la velocità v_d in queste ipotesi:

1. Gli elettroni si muovono in un reticolo di atomi fermi (cioè la loro agitazione termica è trascurabile).
2. Gli elettroni sono liberi, quindi equivalgono a un gas perfetto di atomi a temperatura T. La loro velocità per agitazione termica è quindi (dalla termodinamica) $v_{term} = \sqrt{(3KT/m)} \simeq 10^5$ m/s.
3. In media, gli urti sono casuali quindi la media delle velocità dopo ogni urto è nulla.

La v_d può essere quindi calcolata come velocità media di un moto uniformemente accelerato lungo ℓ e di durata τ, con partenza da fermo, per la terza ipotesi e perché l'agitazione termica non contribuisce al moto di deriva. Si trova quindi:

$$v_d = \frac{eE}{m}\tau \tag{5}$$

Inserendo la (5) nella (4) si trova

$$J = \frac{ne^2\tau}{m}E$$

cioè proprio le leggi di Ohm nella forma (3), ammesso di poter definire la conducibilità come $\sigma = ne^2\tau/m$. Questo è possibile perché tutte le grandezze che compaiono sono costanti, cioè indipendenti dal campo E: n è una proprietà del materiale, e e m sono costanti universali, τ è in buona approssimazione indipendente da E perché dipende dalla velocità degli elettroni, ma il contributo alla velocità dipendente da E è solo la v_d, che è trascurabile[1] rispetto alla v_{term}.

[1] Si può stimare l'ordine di grandezza di v_d nel caso di un filo di sezione 1 mm^2 percorso da una corrente di 10 mA: $v_d = I/(S \cdot e \cdot n) = 10^{-2}\text{A}/(10^{-6}\text{m}^2 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 8.5 \cdot 10^{28}\text{m}^{-3}) \simeq 1\mu\text{m/s}$. Il numero n di elettroni liberi per unità di volume si ottiene moltiplicando il numero di atomi per unità di volume per gli elettroni più esterni, cioè per la valenza. Per il rame, monovalente, la densità è $\delta = 8.96 \cdot 10^3\text{kg/m}^3$ e il peso atomico $A = 63,54$, quindi $n = \delta/A \cdot N_A = 8.5 \cdot 10^{28}\text{elettroni/m}^3$.