UNA FUNZIONE PER DESCRIVERE ALCUNI FENOMENI DI CRESCITA

a) La crescita dei batteri.

I batteri si riproducono per scissione. Supponiamo di avere una coltura di batteri in condizioni tali per cui nell'intervallo di tempo considerato non ne muore nessuno, e dopo ogni ora tutti si sono riprodotti. Allora il numero di batteri ogni ora diventa .... volte quello dell'ora precedente.

Chiamiamo P_0 il numero (in milioni) di batteri al tempo t=0 e $P(t)$ il numero di batteri al tempo t (misurato in ore).

1) Trova l'espressione di $P(t)$
   $P(t)$ = ...

Con l'espressione trovata, è facile calcolare quanti batteri ci sono dopo un numero intero di ore a partire dal tempo iniziale, se si conosce P_0. Vediamo se è possibile sfruttare la funzione scritta per calcolare il numero di batteri dopo mezz'ora, o un quarto d'ora, o in generale dopo una frazione qualsiasi di ora.

2) Prova a formulare un'ipotesi e a verificarla:
   ogni mezz'ora la popolazione di batteri............................. ....

Verifica dell'ipotesi. Completa la seguente tabella che indica, in base all'ipotesi che hai fatto, la crescita della popolazione di batteri (convenzionalmente poniamo uguale a 1 la popolazione al tempo t=0):

t (in ore)	0	1/2	1	3/2	2	5/2
$P(t)$	1					

I valori calcolati secondo la tua ipotesi sono coerenti con la condizione che i batteri raddoppino ogni ora?

La caratteristica fondamentale che deve avere la funzione che stiamo costruendo, per descrivere l'andamento della crescita dei batteri, è che PER INTERVALLI DI TEMPO UGUALI, LA FUNZIONE AUMENTA DI UN FATTORE COSTANTE. Ad esempio abbiamo già visto che ogni ora aumenta di un fattore ....

3) La frase in maiuscolo significa che:
   a. $P(1/2) - P(0) = P(1) - P(1/2) = P(3/2) - P(1) = P(t+1/2) - P(t) = \alpha$
   b. $P(1/2) / P(0) = P(1) / P(1/2) = P(3/2) / P(1) = P(t+1/2) / P(t) = \alpha$
   c. $P(1/2) = ½\, P(0)$; $P(1) = P(1/2)$; $P(n/2) = n\, P(0)$;

   Quindi, $P(1)=\dfrac{P(...)^2}{P(...)}$ da cui $\dfrac{P(1)}{P(0)}=\left[\dfrac{P(...)}{P(...)}\right]^2 = \alpha^{.....}$

   Analogamente, $P(3/2) / P(0) = \alpha^{.....}$, $P(n/2) / P(0) = \alpha^{.....}$

4) A cosa è uguale il fattore α di crescita ogni mezz'ora? Considera che $P(1)/P(0) = 2$ perché i batteri raddoppiano ogni ora.

5) Usando i risultati precedenti, determina il fattore di crescita ogni quarto d'ora, e completa la tabella sottostante

t (in ore)	0	1/4	3/4	1	1/k	n/k
$P(t)$	1			2		

b) La scelta dell'investimento
Hai 1000 euro e vuoi investirli nel migliore dei modi (senza però rischiare) per avere il massimo rendimento tra qualche anno. Ti rechi in banca e ti vengono proposte due soluzioni:
Soluzione A: ti propongono un tasso composto del 4% anno (cioè ogni anno il tuo capitale aumenta del 4% e l'anno successivo questo tasso viene applicato anche agli interessi maturati negli anni precedenti).
Soluzione B: in alternativa, ti propongono un tasso semplice del 5% annuo, cioè il tasso viene applicato solo al capitale che depositi e non agli interessi maturati.
Quale soluzione ti conviene di più?

Chiamiamo montante $M(t)$ il capitale (in euro) al tempo t (espresso in anni), C_0 il capitale iniziale investito.

1) Soluzione A: $M_A(t)$ = ...
   Soluzione B: $M_B(t)$ = ...
2) Quale delle due funzioni è analoga a quella che descrive la crescita dei batteri? Nel caso del tasso .... il montante aumenta id un fattore pari a .... ogni anno.
3) Completa la seguente tabella, calcolando il montante:

Investimento/anni	1	2	3	4	5
A					
B					

Diventa più conveniente l'investimento .... dopo .... anni.

Calcolare esattamente in quale istante diventa più conveniente un investimento sull'altro è un problema per ora troppo complicato. Lasciamolo da parte e facciamoci una domanda più semplice.

4) Dopo quanto tempo il montante raddoppia, nel caso di tasso composto? Scrivi l'equazione che si deve risolvere per rispondere a questa domanda:

$$M_A(t)/C_0 = \text{..................} = 2$$

Finora non ci siamo posti il problema del dominio delle funzioni che scrivevamo. I valori che abbiamo usato per t sono naturali o razionali. La soluzione della domanda (4) è però un numero irrazionale. Prova a dimostrarlo in modo analogo alla dimostrazione dell'irrazionalità del numero $\sqrt{2}$.
Allora la funzione $M(t)$ deve essere definita sui numeri reali, e resta il problema di definire una potenza con esponente irrazionale.

PER CASA
1. In riferimento al paragrafo (a), quanti batteri c'erano 1 h prima di cominciare a contarli? E 10 min prima?

2. Un modello per il decadimento radioattivo
Supponi di avere un campione di 10 g di radon, (numero atomico Z=86, peso atomico A=222). Il radon è radioattivo, cioè i suoi atomi hanno una certa probabilità di emettere particelle dal nucleo, trasformandosi in un altro elemento. Il tempo di dimezzamento per il radon, cioè il tempo dopo il quale metà degli atomi si sono trasformati e quindi la quantità di radon si è dimezzata, è τ = 1620 anni.
Con questi dati: (1) Scrivi una funzione che rappresenti il numero di nuclei di radon al variare del tempo; (2) trova la massa di radon rimasta dopo 15 anni; (3) dimostra che il valore trovato è irrazionale: che significato ha una massa, e quindi un numero di atomi, irrazionale? (4) trova la massa di radon presente nello stesso campione 1000 anni fa.