Il postulato di Archimede e il metodo di esaustione

Il postulato di Eudosso-Archimede dice che, dati due numeri $x < y$, esiste almeno un numero naturale n tale che $nx > y$. Questo postulato viene sfruttato nel "metodo di esaustione", per trovare delle grandezze di cui non si conosce il valore con procedimenti finiti, ma che si possono ottenere con infinite approssimazioni successive, che si avvicinano sempre di più al valore.

Le serie

Le serie sono la "versione matematica" dei paradossi di Zenone. Ognuno si può schematizzare come una somma di infinite frazioni sempre più piccole, del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$$

Gli argomenti di Zenone sembrano paradossali perché mostrano come ammettere di dividere indefinitamente un segmento porti a conclusioni contrarie all'esperienza (Achille non dovrebbe mai raggiungere la tartaruga). In matematica, un nuovo concetto (un somma infinita, un numero incommensurabile) può essere introdotto se le nuove definizioni e, se necessari, i nuovi assiomi non portano contraddizioni nella teoria.

Se la somma di infiniti termini può essere un numero finito, possiamo usarla nelle operazioni. Ad esempio:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + ...$$

moltiplichiamo per q:

$$S * q = q + q^2 + q^3 + q^4 + ... = S - 1$$

da cui $S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Verifichiamolo con $q = 3$:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 3 + 9 + 27 + ... \\ 3S &= 3 + 9 + 27 + ... = S - 1 \end{aligned}$$

cioè $S = -1/2$, ma S è somma di termini positivi! Per risolvere la contraddizione, bisogna capire da cosa deriva. Sarebbe sbagliato qui concludere che una somma di infiniti termini non può dare un numero finito, perché la contraddizione nasce solo per $q \geq 1$.

Definiamo invece rigorosamente la somma S di una serie a termini positivi come il più piccolo numero maggiore delle somme parziali, e usiamo il postulato di Eudosso-Archimede.

Data la somma $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, con $0 < q < 1$, dimostriamo che la sua somma è $S = \frac{1}{1-q}$.

Sapendo dalle progressioni geometriche che $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, sicuramente S è maggiore di ogni somma parziale. E' il più piccolo maggiorante perché se ce ne fosse uno minore, si potrebbe scrivere come $\frac{1-\epsilon}{1-q}$, cioè $\forall n \ \frac{1-q^n}{1-q} < \frac{1-\epsilon}{1-q}$, ovvero $q^n > \epsilon$. Siccome $0 < q < 1$, lo scriviamo come $q = \frac{1}{1+h}$ e la disuguaglianza diventa

$$\frac{1}{nh} > q^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n > \epsilon$$

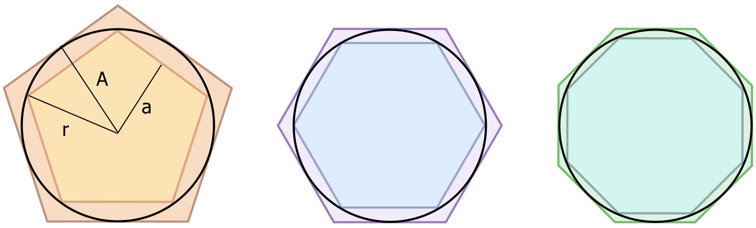
$\forall n$, e questo è contro il postulato di Archimede.

Nuovi numeri

Il metodo di esaustione è stato usato nel paragrafo precedente con i numeri naturali e i numeri razionali. Applicandolo a particolari situazione geometriche, si scopre che si possono trovare delle grandezze incommensurabili, cioè delle coppie di lunghezze x e y per le quali non esistono due numeri naturali m e n tali che $mx = ny$. Da qui la separazione tra geometria e aritmetica, perché si trovarono grandezze geometriche non rappresentabili da numeri.

Un esempio è dato dall'area del cerchio. Si può approssimare sempre meglio l'area inscrivendo e circoscrivendo alla circonferenza poligoni regolari con numero di lati n sempre maggiore; è facile vedere che l'area del cerchio A_C è sempre compresa tra l'area del poligono inscritto A_{in} e l'area quello circoscritto A_{cir}. Scrivendo le aree dei due poligoni come $A_{in} = \frac{1}{2}pa$ e $A_{cir} = \frac{1}{2}PA$, si trova

$$A_{in} = \frac{1}{2}pa < A_C < A_{cir} = \frac{1}{2}PA$$



Aumentando sempre più il numero di lati, i due perimetri p e P diminuiscono sempre di più la loro differenza e "tendono" a essere uguali alla circonferenza c; allo stesso modo, i due apotemi a e A "tendono" a essere uguali al raggio r. Questo significa che possiamo trovare l'area del cerchio come area del triangolo che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio. Il problema è che raggio e circonferenza non sono commensurabili, quindi non esiste un numero per rappresentare quest'area!

Bisogna quindi introdurre un nuovo postulato, che ammetta l'esistenza di questi numeri che "rappresentino" delle grandezze che, senza dubbio, geometricamente esistono. *Il postulato di Cantor dice che due classi contigue hanno sempre un elemento di separazione*.

Chiamando *per definizione* π il rapporto tra circonferenza e diametro, dalla disuguaglianza $p < c < P$ si vede che si può approssimare π con la disuguaglianza $\frac{p}{2r} < \pi < \frac{P}{2r}$.

Abbiamo quindi definito un nuovo tipo di numeri, diversi dai razionali, e che perciò chiamiamo **irrazionali**. Gli irrazionali sono di due tipi, gli **irrazionali algebrici**, cioè che si possono ottenere attraverso operazioni algebriche da numeri razionali (ad esempio, $\sqrt{2}$), e gli **irrazionali trascendenti**, tutti gli altri (ad esempio, π).

Nota storica: l'esistenza di grandezze incommensurabili era nota già a Pitagora, che aveva dimostrato che il rapporto tra diagonale e lato di un quadrato non è un numero razionale. L'approssimazione dei numeri irrazionali con il metodo di esaustione era nota nell'antichità e venne applicata diffusamente da Archimede, che ad esempio approssimò π usando poligoni di 96 lati. Tuttavia, nessuno aveva ancora dimostrato che π fosse irrazionale (Lambert, 1761), né che fosse trascendente (Eulero, 1775). La definizione stessa dei numeri irrazionali con il postulato di Cantor deve attendere l'800.

Gli insiemi infiniti

Con l'introduzione di nuovi tipi numeri è possibile definire diversi insiemi di infiniti elementi: l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$, degli interi $\mathbb{Z}$, dei razionali $\mathbb{Q}$, dei reali $\mathbb{R}$, che è l'insieme che comprende i razionali e gli irrazionali.

E' lecito chiedersi se esiste qualche relazione tra questi infiniti.

Insiemi numerabili

L'insieme dei naturali, degli interi, dei quadrati, ecc, sono insiemi di infiniti elementi, ma discreti, cioè è sempre possibile determinare una coppia di elementi fra cui non ce ne sono altri. Cercando di "contare" questi elementi, si scoprono degli apparenti paradossi. Due insiemi finiti i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca hanno evidentemente lo stesso numero numero di elementi, e si dicono *equipotenti.*

Apparentemente gli interi sono il doppio dei naturali, perché sono i naturali più tutti gli opposti. Tuttavia, è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi, basta associare ai naturali dispari l'intero $2n - 1$ e ai pari l'intero $-2n$:

0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Allo stesso modo, è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra i naturali e i quadrati, associando a ogni n il suo quadrato:

0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	4	9	16	25	36	...

Questa corrispondenza fu trovata da Galileo, che la considerò un paradosso, perché l'insieme dei qudrati è un sottoinsieme proprio dei naturali, quindi i quadrati non possono contemporaneamente di meno e lo stesso numero dei naturali.

Gli insiemi che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali si dicono **numerabili**. E' facile vedere come tutti gli insiemi discreti siano numerabili, perché basta metterli in un certo ordine e "contarli", cioè metterli in corrispondenza con i naturali.

L'insieme dei razionali è invece **denso**, cioè tra qualunque coppia di numeri razionali ce ne sono infiniti altri. Sembra quindi che i razionali siano molti di più dei naturali, eppure anche $\mathbb{Q}$ è numerabile, perché si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ con il metodo della diagonalizzazione (la dimostrazione risale a Cantor). Addirittura, l'insieme dei punti che hanno coordinate razionali in un piano cartesiano si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti che si trovano su un asse.

Si capisce quindi che serve una definizione di insieme infinito che eviti i paradossi dovuti a un'interpretazione ingenua del numero di elementi di un insieme infinito. *Dedekind nel 1872 definisce insieme infinito un insieme equipotente a una sua parte propria*. Inoltre un insieme A ha potenza minore di un altro B se è in corrispondenza biunivoca con una parte propria di B.

Ipotesi del continuo

Dalle osservazioni precedenti, si potrebbe sospettare che tutti gli insiemi infiniti siano equipotenti. Anche gli irrazionali algebrici sono numerabili, perché derivano da operazioni sui razionali. Gli irrazionali trascendenti sembrano addirittura in numero finito, perché se ne conoscono esplicitamente pochissimi (π, il numero di nepero e e pochi altri). Tuttavia, i razionali uniti agli irrazionali danno i reali. Cantor ha dimostrato che non c'è corrispondenza biunivoca tra i reali e i naturali, mentre c'è corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei reali e quello delle parti di $\mathbb{N}$. Definendo la potenza dei naturali con il simbolo $\aleph_0$, si può dimostrare che l'insieme delle parti $P(\mathbb{N})$ ha potenza $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, che è quindi anche la potenza di $\mathbb{R}$. Procedendo all'inifinito, si trova la potenza dei successivi insiemi delle parti, e quindi infiniti sempre superiori. Le potenze di questi insiemi si chiamano anche *cardinalità*, e gli infiniti $\aleph_0$, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$, ... si chiamano *cardinali transfiniti*.

Cantor non riuscì a dimostrare che non ci fossero infiniti tra il numerabile e il continuo, e la introdusse quindi come congettura non dimostrata, detta *ipotesi del continuo*: non esiste nessun insieme la cui cardinalità è compresa tra la cardinalità del naturale e la potenza del continuo.